P4 Drita nga akulli: një kurorë për Diellin

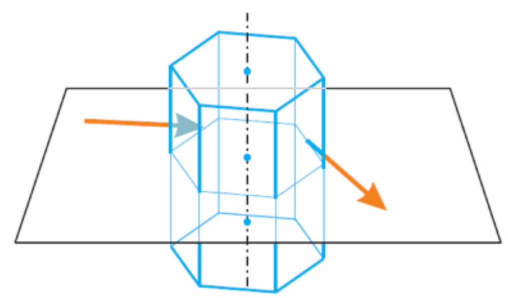
Aureola diellore, si ajo e treguar në foto, është një fenomen që shfaqet në kushte të veçanta të motit. Kjo është një unazë e hollë ndriçuese që rrethon Diellin, i dukshëm në një qiell të qartë: në zonën e brendshme pranë unazës qielli shfaqet më i errët, ndërsa në zonën e jashtme vërehet një shkëlqim i zbehtë i cili zvogëlohet gradualisht derisa bashkohet me ngjyrën e zakonshme blu të qiellit të pastër.

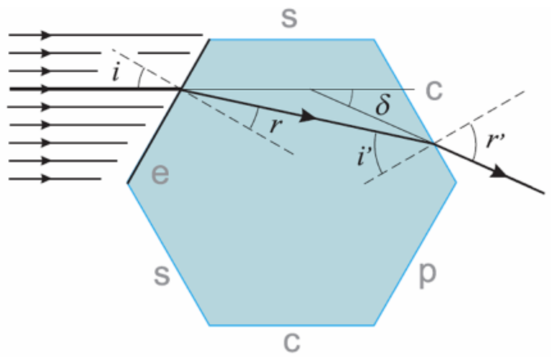
Fenomeni është për shkak të pranisë në qiell të një reje me kristale të vogla akulli, që kanë formën e prizmave gjashtëkëndore, të cilat bëjnë që rrezet e Diellit që prekin një nga muret anësore, mund të shfaqen pjesërisht të devijuar.

Qëllimi i këtij problemi është të kuptojmë se si ndodh formimi i unazës ndriçuese, në korrespodencë me një vlerë të veçantë të këndit të devijimit, dhe të llogaritet kjo vlerë.

Për thjeshtësi, ne do të konsiderojmë vetëm kristalet boshti i të cilëve është pingul me planin e përcaktuar nga një rreze rënëse dhe e devijuar që arrin te vëzhguesi, siç tregohet në figurën në të majtë.

Këndi i devijimit δ është ai i paraqitur në figurën në të djathtë ku përcaktohen edhe këndi i rënies i , këndi i përthyerjes së brendshme r, këndi i rënies së brendshme i' dhe këndi i pasqyrimit të jashtëm r'.





Është e qartë se për shkak të rënies normale në një faqe anësore "e" të gjitha rrezet dalin nga faqia anësore e kundërt "p", pa u devijuar. Për kënde rënie jo zero ($0^0 < i < 90^0$) rrezet mund të dalin nga faqia paralele e kundërt ("p") ose nga një prej atyre ngjitur ("c"), ose nga njëra prej faqeve "s" ngjitur me faqen rënëse "e".

1. Përcaktoni vlerën minimale n_{min} të treguesit të përthyerjes për të cilin çdo rreze rënëse në faqen "e" dhe e reflektuar në drejtim të faqes "s" nuk del nga "s".

Rrezet rënëse mbi faqen "e" refraktohet ose drejt faqes "s", ose drejt faqes "c", ose drejt faqes "p". Me vlerat e treguesit të përthyerjes më të lartë se n_{min}, rrezet e refraktuara drejt "s" pasqyrohen më pas drejt "c" dhe prej aty dalin. Rrezet e refraktuara drejt "c" mund të dalin ose të pasqyrohen përsëri në prizëm. Rrezet e refraktuara drejt "p" dalin nga prizmi.

2. Duke marrë parasysh një rreze drite uniforme që bie mbi faqen "e" me kënd të rrënies i, llogarisni ç'pjes η e kësaj rreze refraktohet drejtpërdrejt në faqen "p" (d.m.th., pa pësuar reflektime të brendshme në faqet e tjera), në funksioni të këndit të rënies i dhe të treguesit të përthyerjes n.

Për të studiuar fenomenin e aureolës do të merremi, tani e tutje, vetëm me rrezet e refraktuara drejt faqes "c".

KUJDES: Nga këtu e tutje, përcaktoni vlerën e këndeve me saktësinë e 1/100 të gradës.

3. Duke ditur që treguesi i përthyeries n të akullit për dritën e dukshme të ngjyrave të ndryshme është mesatarisht 1.310, llogaritni vlerën minimale të këndit të rënies i për të cilin disa rreze refraktive mund të dalin drejt faqes "c". Llogarit gjithashtu këndin përkatës të devijimit δ.

Parimi i kthyeshmërisë së rrugës optike mund të shprehet duke thënë se "*nëse për të shkuar nga një pikë A në një pikë B drita ndjek një rrugë të caktuar, atëherë duke filluar nga B mund të arrijë në A duke ndjekur të njëjtën rrugë në drejtim të kundërt*".

4. Pa nevojën e llogaritjeve të mëtejshme, por duke përdorur parimin e përmendur më lart, përcaktoni këndet (i, r' dhe δ) që korrespondojnë me vlerën maksimale të këndit të rënies për të cilin disa rreze mund të dalin nga faqia "c".

Duke pasur parasysh simetrinë e lidhur me parimin e kthyeshmërisë të thënë më lart, është e lehtë të kuptohet se për cilin kënd të rënies i_0 këndi i devijimit δ do të ketë një vlerë minimale ose maksimale δ_0 e cila është saktësisht rrezja këndore e aureolës.

5. Përcaktoni sa janë i_0 dhe δ_0 dhe tregoni nëse është një vlerë maksimale apo minimale.

Funksioni δ(i) është mjaft i ndërlikuar; në të vërtet rezulton

$$\delta(i) = i + \arcsin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{1}{2}\sin i\right] - 60^0$$

Për këtë arsye, për studimin e mëposhtëm, në një zonë mjaft të gjerë të δ_0 është i përshtatshëm përafrimi i tij me polinomin e shkallës së dytë $y(x) = ax^2 + bx + c$, ku y është këndi i devijimit dhe x këndi i rënies, $b=-0.6889$ dhe $c=35.93^0$.

6. Përcaktoni koeficientin a të polinomit të dhënë dhe kontrolloni, për të paktën dy vlera të ndryshme të i, që gabimi relativ i përafrimit është më pak se 1% në intervalin $30^0 \leq i \leq 55^0$.

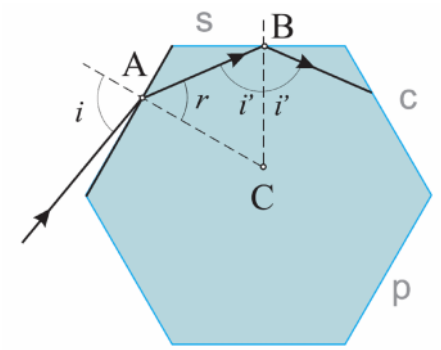
Rrezja e aureolës është e lidhur me vlerën δ_0 të gjetur në pyetjen 5. Për ta kuptuar këtë fakt, supozoni se kristalet e konsideruara janë në numër shumë të madh N dhe se ato janë të orientuara rastësisht, në mënyrë që shpërndarja statistikore e këndit të rënies të jetë uniform.

7. Duke përdorur përafrimin polinomial, përcaktoni raportin midis gjerësisë së intervalit të këndeve të rënies për të cilat devijimi ndryshon nga δ_0 për më pak se 0.01^0 dhe gjerësinë e intervalit për të cilin devijimi ndryshon nga δ_0 midis 1.0^0 dhe 1.01^0.

8. Shpjegoni se si rrezja e aureolës është e lidhur me vlerën minimale të devijimit këndor δ_0.

Zgjidhje

Pyetja n. 1.



Rrezet që bien mbi faqen e brendëshme “s” mund të dalin nga materiali vetëm nëse këndi i brendshëm i rënies i' është më i vogël se këndi limit i_{lim}, i cili është një funksion i treguesit të përthyerjes (*pasqyrimi i plotë i brendshëm*):

$$\sin i_{lim} = \frac{1}{n} \Rightarrow i_{lim} = \arcsin\frac{1}{n}$$

Çdo rreze rënëse me kënd i, i tillë që këndi i rënies i'mbi faqen “s” të jetë më i madh se këndi limit, nuk mund të dalë nga ajo sipërfaqe, por pëson një pasqyrim të plotë

Duke marrë parasysh trekëndëshin ABC në figurë kemi

$$r + i' + 60^0 = 180^0 \Rightarrow i' = 120^0 - r$$

dhe prandaj vlera minimale i' merret për maksimumin e r pra për maksimumin e i duke pasur parasysh që funksioni r(i) është monoton në rritje; vlera maksimale e i është 90^0 që korrespondon me këndin limit si këndi i reflektimit të tij;

$i'_{min} = 120^0 - i_{lim}$

$$i'_{min} > i_{lim} \Rightarrow i_{lim} < 60^0 \Rightarrow \frac{1}{n_{min}} < \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ që nga } n_{min} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155$$

Pyetja n. 2.

Për një i të caktuar konsiderohet rrezja e veçantë që kalon kulmi P i ndërmjet faqeve “p” dhe “c” dhe përcaktohet se në cila pikë A të faqes të rënies kaloi rrezia. Raporti MA/MN përcakton pjesën e dritës që kalon në faqen “p”.

Jepet R rrezja e rrethit të jashtëshkruar gjashtëkëndëshit dhe a apotema (me $a = R\sqrt{3}/2$) kemi që MN = R ndërsa AN = 2a tg$r$

(r është këndi i përthyerjes në hyrje.)
Duke përdorur relacionin trigonometrik të njohur

$$tg\ r = \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

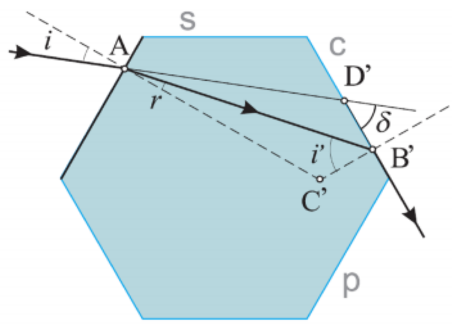
pjesa e kërkuar η është

$$\eta = \frac{MA}{MN} = 1 - \frac{AN}{MN} = 1 - \frac{2a\ tg\ r}{R} = 1 - \frac{\sqrt{3}\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Pyetja n. 3.

Për akullin, duke qenë se n=1.310, këndi limit është

$$i_{\lim} = \arcsin\frac{1}{n} = 49.76^0$$



Për çdo kënd të rënies jo-zero (i> 0) ka rreze që shkojnë nga brenda në faqen "c", por nëse këndi është shumë i vogël, për shembull shumë afër 0^0, gjithashtu r është dhe këndi i brendshëm i përthyerjes i' është pak më i vogël se 60^0 dhe për këtë arsye më i madh se këndi limit: rrezja pëson pasqyrim të plotë.

Për shkak se disa rreze duhet të dalin nga faqia "c" duhet të jetë
$i' < i_{\lim}$

Në trekëndëshin AB'C' kemi $r + i' + 120^0 = 180^0$ ose $i' = 60^0 - r$ dhe, për të patur rrezet dalëse, duhet të jetë $r > 60^0 - i_{\lim} = r_{\min} = 10.24^0$

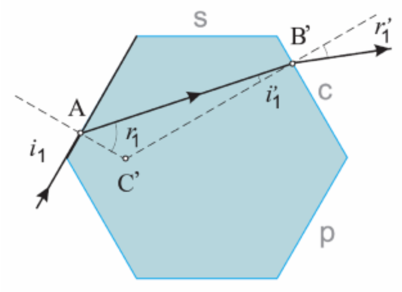
Nga ligji i përthyerjes kemi:

$$\sin i_{\min} = n \sin r_{\min} \Rightarrow i_{\min}\ \arcsin(n \sin r_{\min}) = 13.47^0$$

Për këtë vlerë limit kemi që $r' = 90^0$ dhe këndi i devijimit rezulton

$$\delta = (i \ - r\ ) + (r' - i') = i + r' - (i' + r\ ) = i + r' - 60^0 = 43.47^0$$

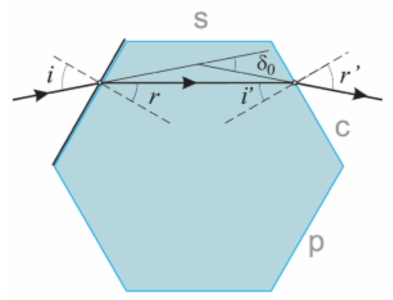
Pyetja n. 4.



Për vetinë e kthyeshmërisë, duke shënuar tani këndet me indeksi 1, është e mjaftueshme për të shqyrtuar situatën simetrike me atë të mëparshme, kjo është ajo në të cilën

$$i_1 = r'_{\max} = 90^0, \quad r'_1 = i_{\min} = 13.47^0 \qquad \text{dhe} \quad \delta_1 = \delta = 43.47^0$$

Pyetja n. 5.



Me simetri, siç shihet më sipër për raste ekstreme, për çdo rreze me këndin e rënies i dhe përthyerjen e jashtëme r' ekziston një rreze me me këndin e rënies $i_1 = r'$ dhe përthyerjen e jashtëme $r'_1 = i$ i cili pëson të njëjtin devijim δ. Rasti i maksimumit ose minimumit të δ duhet të jetë simetrik me vetveten, ose në të cilën $i = r'$. Si pasojë $r = i' = 30^0$ dhe për këtë arsye rrezja brenda kristalit duhet të jetë paralele me faqen "s".

Përsëri nga ligji i pëthyerjes

$$\sin i = n \sin r = 0.655 \Rightarrow i_0 = i = 40.92^0$$

$$\Rightarrow \delta_0 = i + r' - 60^0 = 2i_0 - 60^0 = 21.84^0$$

δ përfaqëson një minimum të funksionit δ(i) pasi vlerat e gjetura më lart ishin më të mëdha se kjo.

Pyetja n. 6.

Duke kujtuar se x dhe y (x) përkatësisht përfaqësojnë këndet i dhe δ(i), u konstatua se, në korrespodencë me devijimin minimal që është për $x_0 = 40.92^0$, rezulton $y_0 = 21.84^0$, pra

$$a = \frac{y_0 - bx_0 - c}{x_0^2} = 8.418 \cdot 10^{-3} / grad$$

Ose, duke kujtuar se parabola që përafron funksionin δ(i) duhet të ketë kulmin në x_0 të tillë që

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow a = \frac{-b}{2x_0} = 8.418 \cdot 10^{-3} / grad \quad \text{si dhe më lartë}$$

Për të përcaktuar gabimin e përafrimit, përdorni funksionin δ(i) të parashikuara në tekst; së pari, për plotësinë, raportohet mënyra për ta arritur atë. Për këtë duhet të kombinojmë marrëdhëniet e mëposhtme

$$\delta = i + r' - 60^0 \qquad \sin r = \sin i / n$$

$$i' + r = 60^0 \qquad \sin r' = n \sin i'$$

Zëvendësimi i r ′, duke përdorur formulën e zbritjes për funksionin sinus, dhe përsëri lidhja Snell për të zëvendësuar r, ne kemi

$$\delta(i) = i + \arcsin[n \sin i'] - 60^0 = i + \arcsin[n(\sin 60^0 \cos r - \cos 60^0 \sin r)] - 60^0 =$$

$$= i + \arcsin\left[n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2 r} - \frac{1}{2}\sin r\right)\right] - 60^0 = i + \arcsin\left[n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} - \frac{1}{2}\frac{\sin i}{n}\right)\right] - 60^0$$

nga e cila merret $\delta(i) = i + \arcsin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{1}{2}\sin i\right] - 60^0$

Këtu verifikimi kryhet për vlerat ekstreme të intervalit të dhënë, duke imagjinuar se për këto vlera mospërputhja e përafrimit nga funksioni është maksimal; ajo është

$$i = x = 30^0: \quad \delta(i) = 23.00^0 \quad y(x) = 22.84^0 \Rightarrow \frac{|y-\delta|}{\delta} \approx 0.7\%$$

$$i = x = 55^0: \quad \delta(i) = 23.41^0 \quad y(x) = 23.51^0 \Rightarrow \frac{|y-\delta|}{\delta} \approx 0.4\%$$

Shënim për komisionin: verifikimi të konsiderohet i saktë për dy vlera të *i*, jo vetëm për ato ekstreme.

Pyetja n. 7.

Lidhja δ(i) duhet të përmbyset për të marrë këndet e rënies në funksion të këndit të devijimit

$$\delta_1 = \delta_0 + 0.01^0, \quad \delta_2 = \delta_0 + 1.0^0 \quad \delta_3 = \delta_0 + 1.01^0$$

$$i(\delta) = x(y) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot (c-y)}}{2a}$$

Duke zëvendësuar vlerat numerike, kemi

$$\delta_1 = 21.85^0 \Rightarrow i_1' = 39.83^0 \text{ dhe } i_1'' = 42.01^0$$

$$\delta_2 = 22.84^0 \Rightarrow i_2' = 30.02^0 \text{ dhe } i_2'' = 51.82^0$$

$$\delta_3 = 22.85^0 \Rightarrow i_3' = 29.97^0 \text{ dhe } i_3'' = 51.87^0$$

Intervali i parë ka amplitude

$$\Delta i_1 = i_1'' - i_1' = 2.18^0$$

ndërsa për të dytën duhet të marrim në konsideratë, dhe të mblidhen, intervalet

$$\Delta i_2' = i_2' - i_3' = 0.05^0 \text{ dhe } \Delta i_2'' = i_3'' - i_2'' = 0.05^0$$

Për shkak se shpërndarja e orientimit të kristaleve është e njëtrajtshme, raporti midis numrit të kristaleve është i barabartë me raportin e kërkuar të ampliteteve të intervalit, ose

$$\rho = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta i_1}{\Delta i_2' + \Delta i_2''} \approx 22$$

Pyetja n. 8.

Meqenëse δ_0 është minimale, nuk ka kristale që devijojnë dritën për kënde të vogla, kështu që qielli shfaqet më i errët në distanca më të shkurtra nga Dielli ndërsa, duke lëvizur jashtë vetëm me 1^0 nga këndi δ_0, numri i kristaleve zvogëlohet shpejt dhe gjithashtu intensiteti i dritës së devijuar është shumë më i ulët; kjo shpjegon shfaqjen e aureoles së ndriçme në distancën këndore δ_0 nga Dielli.